Trabajos de clase curso 2000-2001

1. Discutir la validez de las igualdades:

   $a)\ |x+y+z| = |x+y|+|z|;\ \ b)\ |x|-|y| = |x-y|;\ \ c)\ |x-y+z| = |x|-|z-y|$

2. Demuéstrese que para todo $n\in\mathbb{N}$ se verifica que:

   $$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

3. Hágase uso de la desigualdad de las medias para probar que:

   $$ab^n < \left(\frac{a+nb}{n+1}\right)^{n+1} \quad \text{siendo } a>0,\ b>0,\ a\neq b,\ \text{ y } n\in\mathbb{N}.$$

   Dedúzcase que para todo número natural n se verifica que:

   $$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1},\ \text{ y }\ \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+2} < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

4. Sea $q\in\mathbb{N}$ y $a>0$. Probar que el número $\dfrac{n^q}{(1+a)^n}$ es muy pequeño si n es muy grande.

5. (a) Comparar $a^{\log b}$ con $b^{\log a}$.

   (b) Resolver $\dfrac{1}{\log_x(a)} = \dfrac{1}{\log_b(a)} + \dfrac{1}{\log_c(a)} + \dfrac{1}{\log_d(a)}$

6. Pruébense las igualdades

   (a) $\cos(\operatorname{arctg} x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}};\ \ \operatorname{sen}(\operatorname{arctg} x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ para todo $x\in\mathbb{R}$

7. Sean $a,b\in\mathbb{R}$ tales que $a^2+b^2=1$, $a\neq -1$. Definamos $\vartheta = 2\operatorname{arctg}\dfrac{b}{a+1}$. Pruébese que $\cos\vartheta = a$, $\operatorname{sen}\vartheta = b$.

8. Dado un número $x\neq 0$, calcúlese un número $t\in\mathbb{R}$ tal que $\dfrac{1}{\operatorname{senh} t} = x$. Dicho número, que es único, se llama *argumento cosecante hiperbólica* de x.

9. Estúdiese la continuidad de la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, definida por $f(x) = xE(1/x)$ si $x\neq 0$, $f(0)=1$.

10. Sea A un conjunto no vacío de números reales. Para cada $x \in \mathbb{R}$ definamos la "distancia de x a A" por: $\operatorname{dist}(x,A) = \inf\{|x-a| : a \in A\}$. Pruébese que para todos $x,y \in \mathbb{R}$ se verifica que:

$$|\operatorname{dist}(x,A) - \operatorname{dist}(y,A)| \leqslant |x-y|$$

Dedúzcase que la aplicación $x \mapsto \operatorname{dist}(x,A)$ es continua.

11. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua, mayorada y tal que para todos $a,b \in \mathbb{R}$ con $a < b$, se verifica que $\sup f(]a,b[) = \sup f(\mathbb{R})$. Pruébese que f es constante.

12. Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua verificando que $f(a) < 0$, $f(b) < 0$ y $f(c) > 0$ para algún $c \in]a,b[$. Pruébese que hay dos números u, v tales que $a < u < v < b$, $f(u) = f(v) = 0$ y $f(x) > 0$ para todo $x \in]u,v[$.

13. Supongamos que las funciones f y g y sus derivadas tienen los siguientes valores en $x = 2$ y $x = 3$.

x	$f(x)$	$g(x)$	$f'(x)$	$g'(x)$
2	8	2	1/3	-3
3	3	- 4	2π	5

Calcular las derivadas de las siguientes funciones en los valores dados de x:

a) $f(x)g(x), \quad x = 3$ **b)** $f(x)/g(x), \quad x = 3$

c) $f(g(x)), \quad x = 2$ **d)** $\sqrt{(f(x))^2 + (g(x))^2}, \quad x = 2$

14. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 17$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Pruébese que f es una biyección y estúdiese la derivabilidad de f^{-1}.

15. Pruébense las igualdades

(a) $\arctan x + \arctan \dfrac{1}{x} = \dfrac{\pi}{2} \dfrac{x}{|x|}$ para todo $x \in \mathbb{R}^*$

(b) $\tan(\operatorname{arcsen} x) = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$; $\sec(\operatorname{arcsen} x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $\forall x \in]-1,1[$

(c) $\operatorname{arcsen}(\operatorname{sen} x) = (-1)^n (x - n\pi)$ $\forall x \in [(2n-1)\pi/2, (2n+1)\pi/2]$

16. Calcular los valores máximo y mínimo de las siguientes funciones en los intervalos que se indican:

(a) $f(x) = x^3 - x$ en el intervalo $[-1,2]$.

(b) $f(x) = x^5 + x^3 + 1$ en el intervalo $[-1,1]$.

17. Dibujar las gráficas de las funciones siguientes:

    (a) $f(x)=\dfrac{2x^2-3x+5}{(x+1)(x-2)}$.

    (b) $f(x)=\log(2+\operatorname{sen} x)$

18. Estudiar la convergencia de las sucesiones $\{x_n\}$ definidas para todo $n\in\mathbb{N}$ por:

$$x_1=1,\ \ x_{n+1}=\frac{4+3x_n}{3+2x_n};\qquad x_1=\sqrt{a},\ \ x_{n+1}=\sqrt{a+x_n}\quad (a>0)$$

    Sugerencia: estudiar en cada caso monotonía y acotación.

19. Sea $\{x_n\}$ una sucesión de números reales y supongamos que existen $\rho\in]0,1[$, $p\in\mathbb{N}$, tales que $|x_{n+2}-x_{n+1}|\leqslant\rho|x_{n+1}-x_n|$ para todo $n\geqslant p$. Pruébese que $\{x_n\}$ es convergente.

    Sugerencia: dedúzcase primero que $|x_{n+2}-x_{n+1}|\leqslant\rho^n|x_2-x_1|$. Teniendo ahora en cuenta que para todos $n,h\in\mathbb{N}$ se verifica que:

$$\rho^{n+h}+\rho^{n+h-1}+\rho^{n+h-2}+\cdots+\rho^n<\frac{\rho^n}{1-\rho}$$

    dedúzcase que $\{x_n\}$ verifica la condición de Cauchy.

    Aplicación: estudiar la convergencia de las sucesiones definidas para todo $n\in\mathbb{N}$ por:

$$\mathbf{a})\ \ x_1=1,\ \ x_{n+1}=\frac{1}{1+x_n};\qquad \mathbf{b})\ \ x_1=\sqrt{2},\ \ x_{n+1}=\sqrt{2-x_n}.$$

20. Calcúlense los límites de las sucesiones

$$\frac{1+1/2+\cdots+1/n}{\log(n)};\quad \frac{1^\alpha+2^\alpha+3^\alpha+\cdots+n^\alpha}{n^{\alpha+1}},\quad (\alpha>-1);\quad \sqrt[n]{\frac{(3n)!}{(2n)^{3n}}}$$

$$\frac{n\log n}{\log n!};\quad \left(\frac{\log(n+2)}{\log(n+1)}\right)^{n\log n};\quad \frac{\log\left(1+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{n}\right)}{\log(\log n)}$$

21. Sabiendo que $\{a_n\}\to a$, calcúlese el límite de la sucesión:

$$\frac{\exp(a_1)+\exp(a_2/2)+\cdots+\exp(a_n/n)-n}{\log n}$$

22. Estúdiese la convergencia de las siguientes series:

$$\sum_{n\geqslant 1}\frac{(n+1)^n}{3^n n!}; \qquad \sum_{n\geqslant 2}\frac{n^{\log n}}{(\log n)^n}$$

$$\sum_{n\geqslant 1}\left(\frac{n^2+1}{n^2+n+1}\right)^{n^2}; \qquad \sum_{n\geqslant 1}\frac{(n+1)^n}{n^{n+2}}$$

$$\sum_{n\geqslant 1}\log\left(\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}\right); \qquad \sum_{n\geq 1}(n^{1/n^2}-1)$$

$$\sum_{n\geqslant 1}\frac{3^n n!}{\sqrt[3]{n}\,5.8.11.\cdots.(5+3n)}; \quad \sum_{n\geqslant 1}\left(\frac{2.3.\cdots.(n+2)}{5.6.\cdots.(n+5)}\right)^{1/2}$$

$$\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}\left(e-(1+1/n)^n\right); \qquad \sum_{n\geqslant 1}\left(\frac{1}{n}-\log(1+1/n)\right)$$

23. Estúdiese la convergencia absoluta y la convergencia no absoluta de las series:

   (a) $\displaystyle\sum_{n\geq 1}(-1)^{n+1}\frac{\log(n+2)}{n+2}$

   (b) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}(-1)^{n+1}\left(\frac{1.3.5.\cdots.(2n-1)}{2.4.6.\cdots.2n}\right)^{\alpha}, \ (\alpha\in\mathbb{R})$